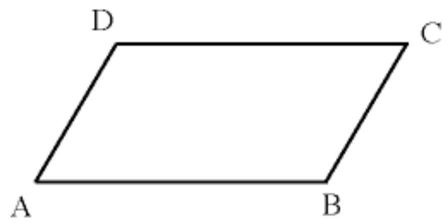
Linearkombination von Vektoren (Vektorketten)

Beispiele:

1) Parallelogramm:

Gegeben ist das Parallelogramm ABCD, das durch die Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ aufgespannt wird.

Drücken Sie die Vektoren $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{BD}$ durch die gegebenen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus.



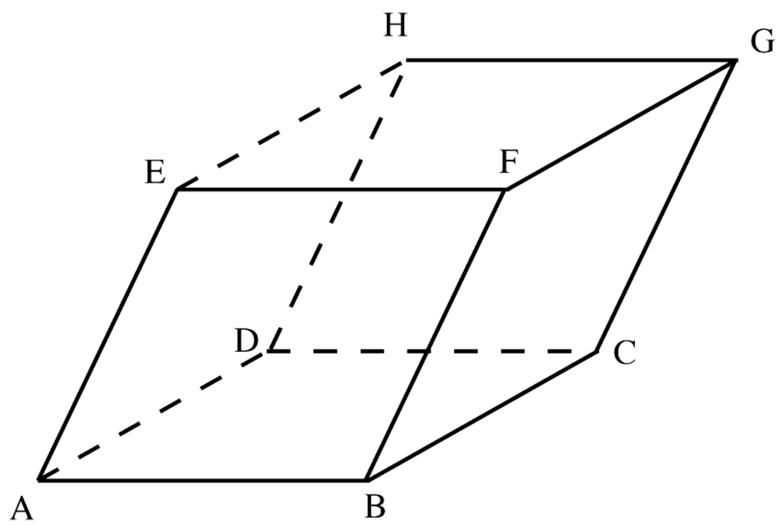
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\vec{a} + \vec{b}$

2) Parallelflach (Spat):

Die Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{CG}$ spannen ein Parallelflach auf.

Drücken Sie die Vektoren $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{AH}$ und $\overrightarrow{BH}$ durch die gegebenen Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus.



$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\vec{a} + \vec{b}$

$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = -\vec{a} + \vec{c}$

$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} = \vec{b} + \vec{c}$

$\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

Aufgaben:

1 Die Vektoren $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$ und $\vec{c}=\overrightarrow{CG}$ spannen ein Parallelflach auf.

Gegeben sind ferner $\overrightarrow{AA_1}=\frac{2}{5}\vec{a}$ und $\overrightarrow{AA_2}=\frac{4}{7}\vec{b}$.

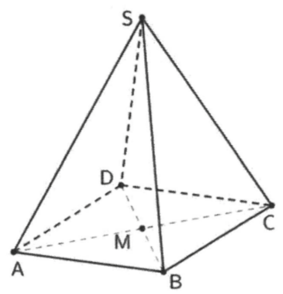
Drücken Sie die Vektoren $\overrightarrow{A_1G}$, $\overrightarrow{A_2F}$ und $\overrightarrow{A_1M}$, wobei M der Mittelpunkt des Parallelogramms BCGF ist, durch die gegebenen Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus.

2 Gegeben ist das Parallelogramm ABCD, das durch die Vektoren $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ und $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$ aufgespannt wird.

Für die Punkte E und F gilt: $\overrightarrow{DE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$ und $\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

Drücken Sie den Vektor $\overrightarrow{EF}$ durch die gegebenen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus.

3.0 Im $\mathbb{R}^3$ ist die vierseitige Pyramide ABCDS mit der rechteckigen Grundfläche ABCD gegeben (siehe Abbildung). Ferner sind die Vektoren $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AD}$ und $\vec{w}=\overrightarrow{AS}$ gegeben.
(Abitur 2025 Teil 1)



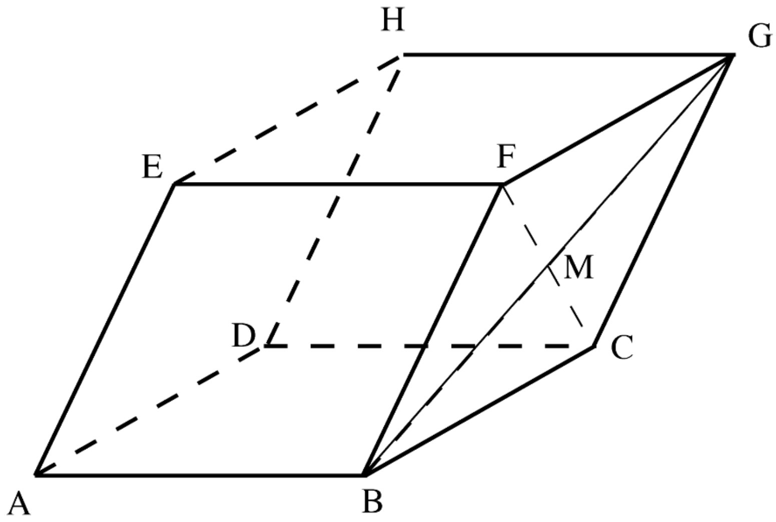
3.1 Für den Punkt P gilt: $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\vec{u}+\frac{1}{3}\vec{w}$

Benennen Sie die besondere Eigenschaft des Punktes P bezüglich des Dreiecks ABS.

3.2 Der Punkt M ist der Schnittpunkt der Diagonalen der Grundfläche ABCD. Geben Sie den Vektor $\overrightarrow{MS}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ an.

Lösungen:

1

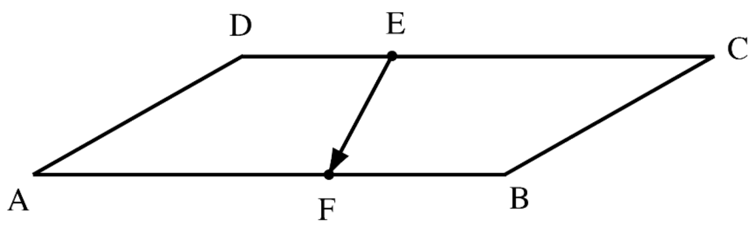


$$\overrightarrow{A_1G}=\overrightarrow{A_1B}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}=\frac{3}{5}\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$$

$$\overrightarrow{A_2F}=\overrightarrow{A_2D}+\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{GF}=\frac{3}{7}\vec{b}+\vec{c}+\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}-\frac{4}{7}\vec{b}+\vec{c}$$

$$\overrightarrow{A_1M}=\overrightarrow{A_1B}+\overrightarrow{BM}=\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BG}=\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG})=\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$$

2



$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AF}=-\frac{1}{3}\vec{a}-\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{a}=\frac{1}{3}\vec{a}-\vec{b}$$

3.1 Der Punkt P ist der Schwerpunkt des Dreiecks ABS.

3.2 $\overrightarrow{MS}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AS}=\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AS}=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}\right)+\overrightarrow{AS}=-\frac{1}{2}\vec{v}-\frac{1}{2}\vec{u}+\vec{w}$